DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

Partie I

Soit Π un espace affine euclidien orienté de dimension 2 . On le rapporte à un repère orthonormé direct Oxy .

Chaque fois qu'il sera question dans cette partie d'une courbe γ de Π , on supposera qu'elle satisfait aux conditions de régularité suivantes : γ est déterminée par une application $t \mapsto M$ d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ dans Π telle que les coordonnées x et y de M soient des fonctions indéfiniment dérivables de t sur I et que, quel que soit $t \in I$, le vecteur $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ ne soit pas nul. Ayant choisi sur γ une orientation et une origine, on notera s l'abscisse curviligne de M , $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire de la tangente orientée à γ en M et φ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \vec{\tau})$. On supposera que, quel que soit $t \in I$, on a $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

Soit a un nombre réel $\geqslant 0$. On désigne par D la droite de Π d'équation $x = a$ et par D' la droite d'équation $x = -a$. La tangente à γ en M rencontre D en P , dont on note l'ordonnée Y . Pour $\varphi \neq 0$, la normale à γ en M rencontre D' en N , dont on note l'ordonnée Z ; si φ s'annule pour une valeur t_0 de t , supposée isolée (c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait $]t_0 - \delta , t_0 + \delta [\subset I$ et que φ ne s'annule pas dans $]t_0 - \delta , t_0 [\cup] t_0 , t_0 + \delta [$), et si Z a une limite finie quand t tend vers t_0 , on considèrera Z comme définie aussi en t_0 , en lui attribuant en t_0 cette valeur limite.

I - 1°/ Pour tout nombre réel λ non nul, on se propose d'étudier les courbes γ de Π telles que $s + \lambda Y$ soit constant le long de γ .

On prend φ comme paramètre. Montrer que, pour que γ satisfasse à la condition précédente, il faut et il suffit que la fonction $\varphi \mapsto x$ soit solution de l'équation différentielle

$$\cos\varphi \frac{dx}{d\varphi} - \lambda (x - a) = 0 .$$

Par intégration de cette équation différentielle, calculer x en fonction du paramètre $u = \operatorname{tg} (\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})$. Calculer y en fonction de u .

Dans la suite, $\mathcal{C}_\lambda$ désignera l'ensemble des courbes γ obtenues, étant entendu que, pour chacune de ces courbes, l'intervalle de variation du paramètre u sera pris égal à $]0, +\infty [$.

Comment obtient-on l'ensemble $\mathcal{C}_{-\lambda}$ à partir de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$?

Indiquer, suivant la valeur de λ , l'allure des courbes $\mathcal{C}_\lambda$.

.../...

I - 2°/ Pour tout nombre réel λ non nul, on se propose d'étudier les courbes γ de Π telles que $s + \lambda Z$ soit constant le long de γ .

a) Examiner d'abord s'il existe des courbes γ satisfaisant à la condition précédente et telles que φ soit constant le long de γ .

b) On se place maintenant dans le cas où φ peut être pris comme paramètre.

Montrer que la condition imposée à γ s'exprime, pour la fonction $\varphi \longmapsto x$, par une équation différentielle du premier ordre que l'on formera. Calculer alors x , puis $\frac{dy}{d\varphi}$, en fonction de φ .

Soient x_0 et y_0 deux nombres réels, x_0 étant distinct de $-a$. Montrer que, sauf pour une valeur λ_1 de λ , indépendante de x_0 et y_0 , il existe une courbe γ satisfaisant à la condition donnée et aux conditions suivantes :

- l'intervalle de variation de φ est de la forme $]\alpha, +\frac{\pi}{2}[$, avec $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < +\frac{\pi}{2}$;

- quand φ tend vers $+\frac{\pi}{2}$, x et y tendent respectivement vers x_0 et y_0 .

Indiquer, suivant la valeur de λ , quel est le plus petit nombre α_0 que l'on puisse prendre pour α . Dans la suite, il sera entendu que l'on prend $\alpha = \alpha_0$.

Montrer aussi que, sauf pour une valeur λ_2 de λ , indépendante de x_0 et y_0 , il existe une courbe γ satisfaisant à la condition donnée et aux conditions suivantes :

- l'intervalle de variation de φ est de la forme $]-\frac{\pi}{2}, \beta[$, avec $-\frac{\pi}{2} < \beta \leqslant +\frac{\pi}{2}$;

- quand φ tend vers $-\frac{\pi}{2}$, x et y tendent respectivement vers x_0 et y_0 .

Indiquer, suivant la valeur de λ , quel est le plus grand nombre β_0 que l'on puisse prendre pour β . Dans la suite, il sera entendu que l'on prend $\beta = \beta_0$.

En faisant décrire à (x_0, y_0) l'ensemble $(\mathbb{R} - \{-a\}) \times \mathbb{R}$, on obtient ainsi deux ensembles de courbes (si λ est égal à λ_1 ou à λ_2 , l'un de ces ensembles est vide), dont on désignera la réunion par $\mathcal{C}'_\lambda$.

Etudier les branches infinies éventuelles des courbes de $\mathcal{C}'_\lambda$ (le tracé des courbes n'est pas demandé) .

I - 3°/ Dans cette question, on suppose $a \neq 0$. Pour quels couples (λ, λ') de nombres réels non nuls, existe-t-il des courbes γ appartenant à la fois à $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{C}'_{\lambda'}$? Donner une représentation paramétrique de ces courbes.

I - 4°/ Etant donné un nombre réel μ , on se propose d'étudier, dans certains cas, les courbes γ de Π telles que $\mu Y + Z$ soit constant le long de γ .

φ étant pris comme paramètre, montrer que la condition précédente s'exprime, pour la fonction $\varphi \longmapsto x$, par une équation différentielle du premier ordre que l'on formera.

Intégrer cette équation différentielle dans les trois cas suivants : $a = 0$ (et μ quelconque), $\mu = 0$ (et a quelconque), $\mu = 2$ (et a quelconque).

Indiquer quelles sont les courbes γ d'une part dans le cas $a = 0$ et $\mu = 1$, d'autre part dans le cas $\mu = 0$ (et a quelconque).

.../...

Partie II

Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 ; on le rapporte à un repère orthonormé direct Oxyz .

On utilise des coordonnées cylindriques, c'est-à-dire que l'on associe à tout élément (r , θ , z) de $\mathbb{R}^3$ le point M de E tel que, si $\overrightarrow{Ox'}$ est l'axe du plan xOy défini par $(\overrightarrow{Ox} , \overrightarrow{Ox'}) = \theta$, l'orientation du plan xOy étant déterminée par $(\overrightarrow{Ox} , \overrightarrow{Oy}) = +\frac{\pi}{2}$, et si $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont respectivement les vecteurs unitaires des axes $\overrightarrow{Ox'}$ et $\overrightarrow{Oz}$, on ait $\overrightarrow{OM} = r\vec{i} + z\vec{k}$. On désigne par $\vec{j}$ le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{Oy'}$ du plan xOy défini par $(\overrightarrow{Ox'} , \overrightarrow{Oy'}) = +\frac{\pi}{2}$.

On détermine une courbe Γ de E en se donnant trois applications $t \longmapsto r$, $t \longmapsto \theta$, et $t \longmapsto z$ d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on prend indéfiniment dérivables sur I , et en associant à t le point M de coordonnées cylindriques r , θ , z . On suppose que, quel que soit $t \in I$, r n'est pas nul et les vecteurs $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ et $\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}$ sont linéairement indépendants. Ayant choisi sur Γ une orientation et une origine, on note S l'abscisse curviligne de M sur Γ et $\vec{T}$ le vecteur unitaire de la tangente orientée à Γ en M . La décomposition de $\vec{T}$ sur la base $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ est donnée sous la forme

$$\vec{T} = \cos\psi \cos\varphi \, \vec{i} + \sin\psi \, \vec{j} + \cos\psi \sin\varphi \, \vec{k}$$

et l'on suppose que, quel que soit $t \in I$, φ et ψ appartiennent à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}[$

II - 1°/ Montrer que, pour que la normale principale à Γ en M rencontre constamment Oz , il faut et il suffit que $r \sin\psi$ soit constant le long de Γ .

Dans la suite, on suppose la condition précédente remplie et l'on désigne par c la valeur constante de $r \sin\psi$, par N le point d'intersection de Oz et de la normale principale à Γ en M et par Z la troisième coordonnée de N (c'est-à-dire que l'on a $\overrightarrow{ON} = Z\vec{k}$) .

II - 2°/ Etant donné un nombre réel λ non nul, on se propose d'étudier les courbes Γ satisfaisant à la condition du II - 1°/ et telles que $S + \lambda Z$ soit constant le long de Γ .

a) Etudier d'abord le cas $c = 0$.

b) On suppose $c \neq 0$. Et l'on prend ψ comme paramètre.

Montrer que, compte-tenu de la condition du II - 1°/ , la condition supplémentaire imposée à Γ s'exprime, pour la fonction $\psi \longmapsto \varphi$, par une équation différentielle du premier ordre que l'on formera et que l'on ramènera à une équation linéaire en introduisant la fonction $\psi \longmapsto \frac{1}{\sin\varphi}$. Calculer alors $\sin\varphi$, puis $\frac{d\theta}{d\psi}$ et $\frac{dz}{d\psi}$, en fonction de ψ .

II - 3°/ c étant toujours supposé non nul, on se place dans le cas $\lambda = -1$ et l'on prend $]0 , +\frac{\pi}{2}[$ comme intervalle de variation du paramètre ψ . On suppose que φ tend vers $+\frac{\pi}{2}$ quand ψ tend vers $+\frac{\pi}{2}$.

Calculer r , θ et z en fonction du paramètre $v = (\operatorname{tg}\psi)^{-\frac{1}{2}}$. Indiquer l'allure de la projection orthogonale sur le plan xOy des courbes Γ obtenues.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail